

ЗА ОДЕЛЈЕЊА III_3 и III_4 ЗА ПЕРИОД 6.9-10 4.

Додатни задатак:

1) Написати једначине асимптота хиперболе

Ако је реална оса 8, а растојање између
жижа једнако 10.

2) Написати једначину тангенте хиперболе

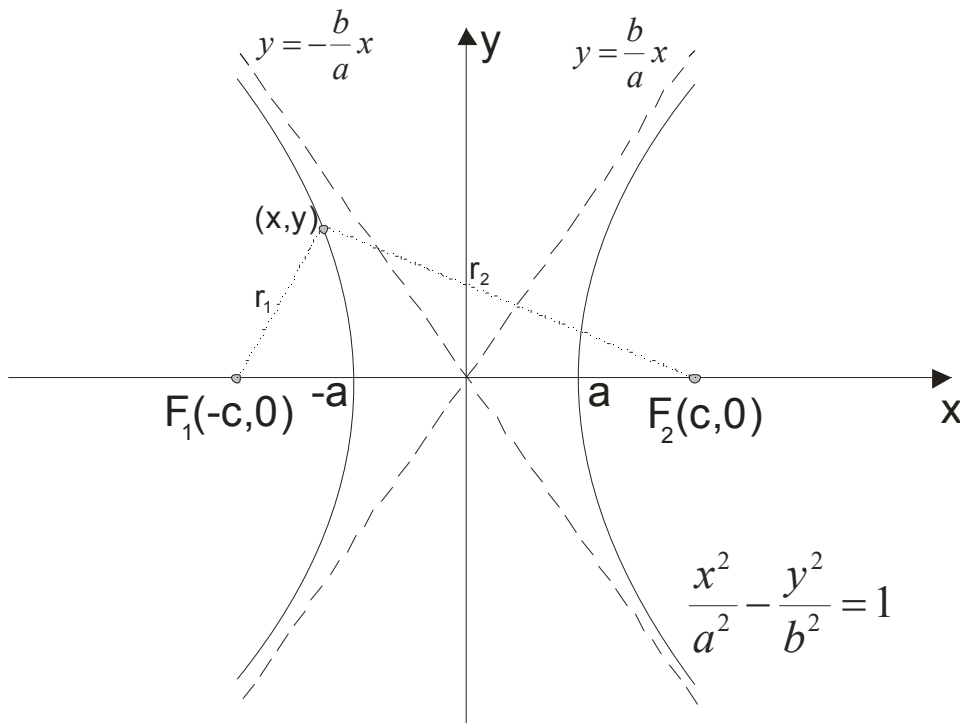
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad \text{у тачки } M\left(-\frac{25}{4}, y\right)$$

3) Одредити тангенту хиперболе ~~у~~ $16x^2 - 9y^2 = 144$

која је паралелна са правом $4x - y + 5 = 0$.

HIPERBOLA

Hiperbola je skup tačaka u ravni s osobinom da je razlika rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.



a - je realna poluosa ($2a$ je realna osa)

b - je imaginarna poluosa ($2b$ je imaginarna osa)

r_1, r_2 su potezi (radijus vektori) i za njih važi $|r_1 - r_2| = 2a$

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ su žiže hiperbole , gde je $c^2 = a^2 + b^2$

$e = \frac{c}{a}$ je ekscentricitet (još kod hiperbole važi da je $e > 1$)

prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole

Glavna jednačina hiperbole je $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ili $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

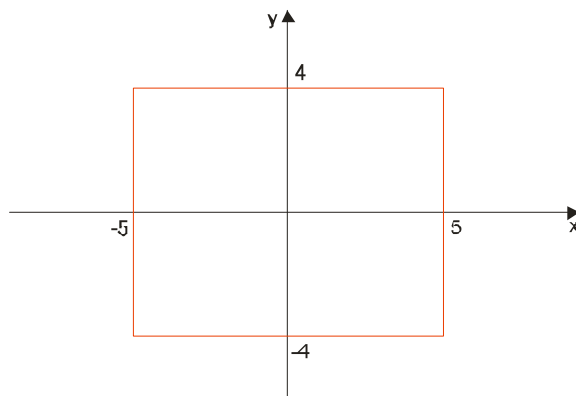
Kako nacrtati datu hiperbolu?

Na primer trebamo nacrtati hiperbolu $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Upoređujući je sa opštom jednačinom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zaključujemo da je $a^2 = 25$ i $b^2 = 16$

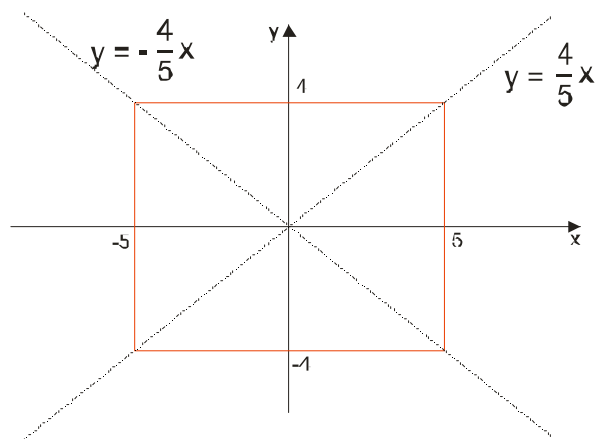
Odavde je jasno da je $a = \pm 5$ i $b = \pm 4$

Nacrtamo pravougaonik:

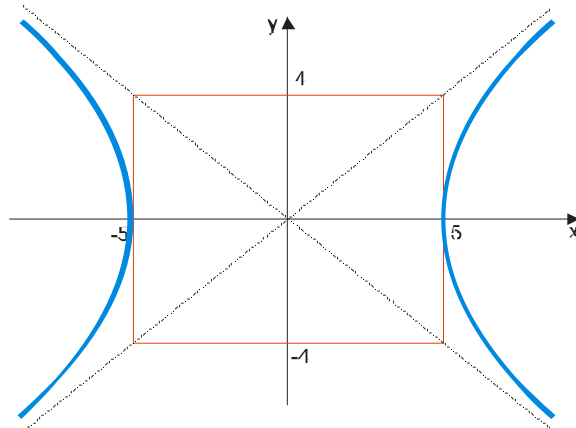


Asimptote su prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$, odnosno za naš primer $y = \frac{4}{5}x$ i $y = -\frac{4}{5}x$.

Na grafiku asimptote sadrže dijagonale ovog pravougaonika:



Sad nacrtamo hiperbolu:



Primer 1.

Odrediti jednačinu hiperbole ako je razmera njenih poluosa $3 : 4$ i $c = 15$

Rešenje:

Upotrebićemo “trik sa k”

$$b : a = 3 : 4$$

$$b = 3k \quad \text{i} \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{pa je}$$

$$a = 4k$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (4k)^2 + (3k)^2$$

$$15^2 = 16k^2 + 9k^2$$

$$225 = 25k^2$$

$$k^2 = \frac{225}{25}$$

$$k^2 = 9$$

$$k = 3$$

Vratimo se da nađemo a i b.

$$b = 3k = 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow b^2 = 81$$

$$a = 4k = 4 \cdot 3 = 12 \rightarrow a^2 = 144$$

Pa je hiperbola:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$$

Primer 2.

Odrediti jednačinu hiperbole ako je rastojanje između žiža jednako $10\sqrt{2}$, a jednačine njenih asimptota su $y = \pm \frac{3}{4}x$

Rešenje:

Rastojanje između žiža je $2c = 10\sqrt{2}$ pa je $c = 5\sqrt{2}$.

$y = \pm \frac{3}{4}x$ uporedimo sa $y = \pm \frac{b}{a}x$ i dobijamo $\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \rightarrow b = \frac{3}{4}a$

Ovo zamenimo u $c^2 = a^2 + b^2$

$$(5\sqrt{2})^2 = a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2$$

$$50 = a^2 + \frac{9}{16}a^2$$

$$\text{onda je } b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 50 - 32$$

$$50 = \frac{25}{16}a^2$$

$$b^2 = 18$$

$$a^2 = 32$$

Jednačina tražene hiperbole je $\boxed{\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1}$

Prava i hiperbola

Slično kao kod kružnice i elipse, da bi odredili međusobni položaj prave i hiperbole, rešavamo sistem jednačina:

$$y = kx + n \text{ i } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

- Ako sistem nema rešenja, onda se prava i hiperbola ne seku, to jest $a^2k^2 - b^2 < n^2$
- Ako sistem ima dva rešenja, onda prava seče hiperbolu u dvema tačkama $a^2k^2 - b^2 > n^2$
- Ako sistem ima jedno rešenje, prava je tangenta hiperbole i zadovoljava USLOV DODIRA:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$

Napomena

Ako nam traže tangentu hiperbole u datoj tački (x_0, y_0) na hiperboli, onda imamo gotovu formulu:

$$t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Primer 3.

Napisati jednačinu tangente hiperbole $x^2 - y^2 = 40$ u tački $M(x,9)$ koja je na hiperboli.

Rešenje:

Najpre ćemo odrediti koordinatu x tačke M tako što u jednačini hiperbole zamenimo y sa 9.

$$x^2 - y^2 = 40$$

$$x^2 - 9^2 = 40$$

$$x^2 = 40 + 81$$

$$x^2 = 121$$

$$x = 11 \vee x = -11$$

Dakle imamo dve tačke koje zadovoljavaju $(-11,9)$ i $(11,9)$

$$x^2 - y^2 = 40 \quad \text{sve podelimo sa 40}$$

$$\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{40} = 1$$

$$\text{Koristimo dalje gotovu formulu} \quad t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Imaćemo dva rešenja, jer smo našli dve tačke:

$$t_1: \frac{x \cdot (-11)}{40} - \frac{y \cdot 9}{40} = 1$$

$$t_1: -11x - 9y = 40$$

$$t_1: -11x - 9y - 40 = 0$$

$$t_2: \frac{x \cdot 11}{40} - \frac{y \cdot 9}{40} = 1$$

$$t_2: 11x - 9y = 40$$

$$t_2: 11x - 9y - 40 = 0$$

Primer 4.

Napisati jednačinu hiperbole ako su poznate jednačine njenih tangenti : $5x-7y-1=0$ i $x-y-1=0$

Rešenje:

Tangente moraju da zadovoljavaju uslov dodira. Zato ćemo obe prave prebaciti u eksplicitni oblik da bi mogli pročitati njihove k i n koje menjamo u uslov dodira.

$$5x - 7y - 1 = 0$$

$$-7y = -5x + 1 \dots \dots / : (-7)$$

$$y = \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}$$

$$k = \frac{5}{7}$$

$$n = -\frac{1}{7}$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$-y = -x + 1$$

$$y = x - 1$$

$$k = 1$$

$$n = -1$$

i

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$

$$a^2\left(\frac{5}{7}\right)^2 - b^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^2$$

$$a^2\frac{25}{49} - b^2 = \frac{1}{49}$$

$$25a^2 - 49b^2 = 1$$

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$

$$a^21^2 - b^2 = (-1)^2$$

$$a^2 - b^2 = 1$$

i

Sad napravimo sistem :

$$a^2 - b^2 = 1$$

$$25a^2 - 49b^2 = 1$$

$$a^2 = b^2 + 1$$

$$25(b^2 + 1) - 49b^2 = 1$$

$$25b^2 + 25 - 49b^2 = 1$$

$$-24b^2 = -24$$

$$b^2 = 1 \rightarrow a^2 = b^2 + 1 \rightarrow a^2 = 2$$

pa je tražena hiperbola

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1}$$

Primer 5.

Odrediti ugao pod kojim se seku krive $3x^2 + 4y^2 = 84$ i $3x^2 - 4y^2 = 12$.

Rešenje:

Najpre nademo tačke preseka rešavajući sistem jednačina

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 + 4y^2 = 84 \\ 3x^2 - 4y^2 = 12 \end{array} \right\} +$$

$$6x^2 = 96$$

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = 4 \rightarrow 3 \cdot 4^2 + 4y^2 = 84 \rightarrow 4y^2 = 84 - 48 \rightarrow 4y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

$$x_2 = -4 \rightarrow 3 \cdot (-4)^2 + 4y^2 = 84 \rightarrow 4y^2 = 84 - 48 \rightarrow 4y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

Preseci su u :

$$(4, 3); (4, -3); (-4, 3); (-4, -3)$$

Ugao pod kojim se seku krive je ustvari ugao između tangenata u jednoj od tačaka preseka!

Uzećemo tačku (4,3) i u njoj postaviti tangente na elipsu i na hiperbolu...

$$t_e : \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \quad \text{i} \quad t_h : \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

$$3x^2 + 4y^2 = 84 \quad \text{sve podelimo sa 84}$$

$$\frac{3x^2}{84} + \frac{4y^2}{84} = 1$$

$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{21} = 1$$

$$\frac{x \cdot 4}{28} + \frac{y \cdot 3}{21} = 1$$

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$$

$$x + y = 7$$

$$y = -x + 7$$

$$k_1 = -1$$

$$3x^2 - 4y^2 = 12 \quad \text{sve podelimo sa 12}$$

$$\frac{3x^2}{12} - \frac{4y^2}{12} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\frac{x \cdot 4}{4} - \frac{y \cdot 3}{3} = 1$$

$$x - y = 1$$

$$y = x - 1$$

$$k_2 = 1$$

Možemo upotrebiti formulu za ugao između dve prave, ali možemo i odmah zaključiti da se seku pod uglom od 90° .

Kako?

Pa znamo da je uslov normalnosti $k_1 \cdot k_2 = -1$ a to je očigledno zadovoljeno!